Corrigé succinct du sujet d'AN12

Exercice 1

1. f_α (loi uniforme sur $[0,\pi]$) : simulée par méthode de fonction de répartition inverse ($F_\alpha^{-1}(u)=\Pi u$)

f_β : 2 possibilités, soit méthode de fonction de répartition inverse ($F_\beta^{-1}(u)=\Pi\sqrt{u}$), soit méthode acceptation-rejet ($g=f_\alpha$ et M=2)

f_γ (c=1/3) : méthode acceptation-rejet ($g=f_\alpha$ et $M=\frac{\Pi+1}{3}$)

2. $f(x)=\Pi_\alpha f_\alpha(x)+\Pi_\beta f_\beta(x)+\Pi_\gamma f_\gamma(x)$

Soit Y v.a. à valeurs dans $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ désignant le type, et X v.a. à valeurs dans $[0,\pi]$ désignant l'angle de vision.

Méthode des lois marginales pour simuler f : on tire y dans $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ selon $\Pi=(\Pi_\alpha,\Pi_\beta,\Pi_\gamma)$ (méthode de fonction de répartition inverse pour variable discrète) , ensuite x dans $[0,\pi]$ selon f_y

Exercice 2

1.a. $\Omega(X)$: ensemble de toutes les configurations possibles de pixels noirs et blancs sur carré S numérotées de 1 à $m\times m$

$Card\,\Omega(X)=2^{m\times m}$

Soit p_i la probabilité de la configuration numéro i

Simulation directe de X par la méthode de fonction de répartition inverse pour variable discrète : pas efficace car $\Omega(X)$ trop riche

1.b. On a $X=(X_s)_{s\in S}$. Soit $x=(x_s)_{s\in S}$ une réalisation possible

si les X_s sont indépendants alors $P(X=x)=\prod_{s\in S}P(X_s=x_s)$

Simulation : simuler chaque X_s indépendamment des autres, soit simuler $m\times m$ v.a. de Bernouilli (méthode de fonction de répartition inverse pour variable discrète : tirer u selon loi uniforme sur $[0,1]$, si $u<P(X_s=0)$ alors on pose $x_s=0$ et $x_s=1$ sinon)

1.c. cf. polycopié page 33

Echantillonneur de Gibbs simplifié par rapport au polycopié page 35 : les distributions conditionnelles à toutes les autres composantes sont remplacées par les distributions conditionnelles au voisinage

2.a. Méthode des lois marginales : on simule X à l'aide d'une des méthodes de la partie 1 de l'exercice, puis chaque Y_s étant indépendants conditionnellement à X , on simule chaque Y_s avec $f_{Y_s|X_s=0}$ si $x_s=0$ ou $f_{Y_s|X_s=1}$ sinon.

Les densités $f_{Y_s|X_s=0}(y_s)$ et $f_{Y_s|X_s=1}(y_s)$ sont simulées avec technique décrite en page 28 du poly

2.b. En simulant un grand nombre de couples (X,Y) et en testant chaque méthode sur tous ces couples, on peut calculer un taux de classification pour chaque méthode (loi des gds nbres) et construire ainsi un élément de comparaison : la meilleure technique aura le meilleur taux.

Exercice 3

Attention ici les éléments finis ne sont plus des triangles, mais des carrés !

$a_0=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $a_1=(0,0)$, $a_2=(1,0)$, $a_3=(1,1)$, $a_4=(0,1)$, $a_5=(\frac{1}{2},0)$, $a_6=(1,\frac{1}{2})$, $a_7=(\frac{1}{2},1)$, $a_8=(0,\frac{1}{2})$

1. Montrer que Σ est Q-unisolvant. Soit le 9-uplet $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7,\beta_8)$, montrer qu'il existe un unique $p\in Q$ (soit $p(x,y)=\alpha_{00}+\alpha_{10}x+\alpha_{01}y+\alpha_{11}xy+\alpha_{20}x^2+\alpha_{02}y^2+\alpha_{12}xy^2+\alpha_{21}x^2y+\alpha_{22}x^2y^2$) tel que $p(a_i)=\beta_i$ pour $0\leqslant i\leqslant 8$

Il y a différentes manières de démontrer que le système a une solution unique. Si on le résout, on obtient :

$\alpha_{00}=\beta_1$, $\alpha_{01}=-3\beta_1-\beta_2+4\beta_5$, $\alpha_{02}=2\beta_1+2\beta_2-4\beta_5$, $\alpha_{10}=-3\beta_1-\beta_4+4\beta_8$,
$\alpha_{20}=2\beta_1+2\beta_4-4\beta_8$, $\alpha_{11}=16\beta_0+9\beta_1+3\beta_2+\beta_3+3\beta_4-12\beta_5-4\beta_6-4\beta_7-12\beta_8$,

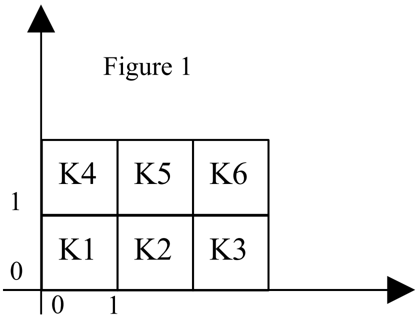
$\alpha_{12}=-16\beta_0-6\beta_1-6\beta_2-2\beta_3-2\beta_4+12\beta_5+8\beta_6+4\beta_7+8\beta_8$,
$\alpha_{21}=-16\beta_0-6\beta_1-2\beta_2-2\beta_3-6\beta_4+8\beta_5+4\beta_6+8\beta_7+12\beta_8$,
$\alpha_{22}=16\beta_0+4\beta_1+4\beta_2+4\beta_3+4\beta_4-8\beta_5-8\beta_6-8\beta_7-8\beta_8$.

Les fonctions de bases s'obtiennent pour les 9-uplets particuliers suivants $\beta^0=(1,0,0,0,0,0,0,0,0)$, $\beta^1=(0,1,0,0,0,0,0,0,0)$ et $\beta^3=(0,0,0,1,0,0,0,0,0)$; soit par exemple $p_0(x,y)=16xy(x-1)(y-1)$ (on vérifie que le polynôme s'annule bien en tous les autres points autres que a_0)

2. Comme en TD, il suffit de compter les points intérieurs (sommets des carrés : 2, milieux des carrés : 6 et milieux des côtés : 7). La dimension du système est 15.

3. On numérote les fonctions φ (de 1 à 15) de gauche à droite et de bas en haut. Au plus grossier, on peut dire que le support de la fonction φ associée aux point a_3 (soit φ_7) sont les carrés K1, K2, K4 et K5 et celui de la fonction φ associée aux point a_0 (soit φ_1) est le carré K1. φ_1 sera exactement la fonction de base p_0 associée au carré K1 calculée dans la question précédente. La restriction de φ_7 à K1 sera exactement la fonction de base p_3 associée au carré K1 calculée dans la question précédente. La restriction de φ_7 à K5 sera la fonction de base p_1 associée au carré K5 (calculée sur K1, reste à translater sur K5). La restriction de φ_7 à K2 sera la fonction de base p_4 associée au carré K2 (qui reste à calculer). La restriction de φ_7 à K4 sera la fonction de base p_2 associée au carré K4 (qui reste à calculer).

Figure 1



4. On rappelle que A est composée des éléments $a_{ij}=\int_D\left(\frac{\partial\varphi_i(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_i(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$.

On voit de suite que a_{ij} sera nul si les supports de φ_i et φ_j ont une intersection vide. D'où la matrice A symétrique

$$\begin{bmatrix}
x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0\\
x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0\\
0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0\\
0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x\\
0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x
\end{bmatrix}$$